سلسلة الأستاذ القــد (رياضيات) 2021

- الإحتمالات -

(الجزء الثاني)

☞ سلسلة البكالوريات

من 2008 إلى 2020

لجميع الشعب العلمية

إيبيه...أههه...أووه

1- دجميع بكالوريات
شعبة العلوم التجريبية
(S.EXP)

2- دجميع بكالوريات
شعبة الرياضيات
(M)

3- دجميع بكالوريات
شعبة التقني الرياضي
(MT)

☜ الإحتمالات (الجزء الثاني - البكالوريات)

جميع بكالوريات شعبة العلوم التجريبية

التمرين الأول (04 نقاط): (BAC 2018 - S1 – S.EXP)

-يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها :

أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3
وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3
وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3

-نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

-نعتبر الحادثتين : A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"
و
B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

1) أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.
عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني (04 نقاط): (BAC 2019 - S1 – S.EXP)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث: A: " سحب كريتين من نفس اللون " ، B: " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

1) بيّن أنّ احتمال الحادثة A هو $P(A)=\dfrac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B.

2) علما أنّ الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث (04 نقاط): (BAC 2019 - S2 – S.EXP)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللّمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آنٍ واحدٍ ثلاث كريات من الصندوق.
ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجّلة على الكريات المسحوبة.

1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي؟

التمرين الرابع (04 نقاط): (BAC 2020 - S2 – S.EXP)

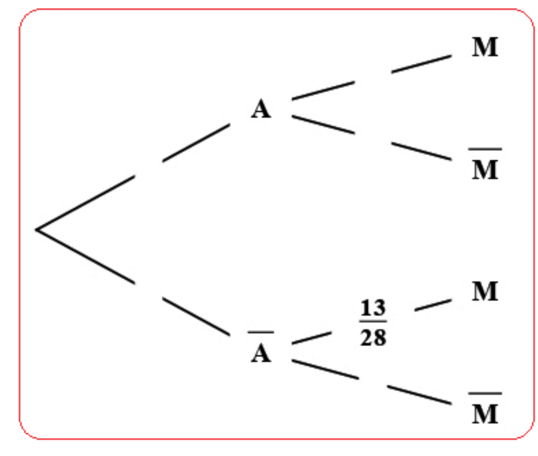
يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء، ويحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء وكل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس.

نسحب عشوائيا كريتين في آنٍ واحد من أحد الوعاءين بالكيفية التالية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 6 ،

إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكريتين من U

و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V .



نسمّي A الحدث:

" الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5 " .

نسمّي M الحدث:

" الحصول على كريتين من نفس اللّون".

1) تحقق أنّ $P(\overline{A})$ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

2) علماً أنّ الكريتين المسحوبتين من U، بيّن أنّ احتمال أن تكونا من نفس اللّون هو $\frac{7}{15}$.

3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

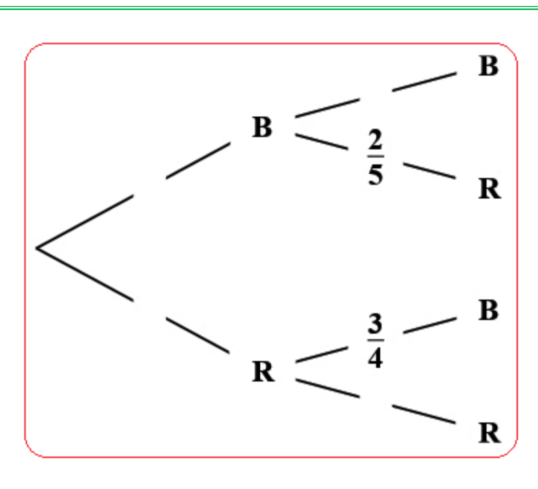
4) احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علما أنّ الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللّون؟

التمرين الخامس (04 نقاط): (BAC 2020 - S2 – S.EXP)

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللمس،

نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية:

إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس .



1) **أ.** انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء

و R إلى الحصول على كرية حمراء.

ب. احسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X.

ب. بيّن أنّ: $P(X=1)=\frac{27}{50}$ ، ثمّ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

جـ. احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

مع تحيات الأستاذ القـــد

☜ الإحتمالات (الجزء الثاني - البكالوريات)

جميع بكالوريات شعبة الرياضيات

التمرين الأول (05 نقاط): (BAC 2009 - S1 - M)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء وَ 6 حمراء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).

احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

يالتل يا مخلوق...يالتل يامخلوقة ... هاذ التمرين هو الوحيد الخاص بالإحتمالات في السنوات الأولى للبرنامج الجديد ثم بعد ذلك طال الغياب و الإنتظار إلى غاية 2018 حيث عادت الإحتمالات من جديد

التمرين الثاني (04 نقاط): (BAC 2018 - S2 – M)

- كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2

وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3، 2، 3

وكرية بيضاء مرقمة بـ: -1

- نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج) احسب احتمال الحادثة: " $X^2 - X > 0$ " .

التمرين الثالث (04 نقاط): (BAC 2019 - S2 – M)

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين.

(الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس)

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1

وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2.

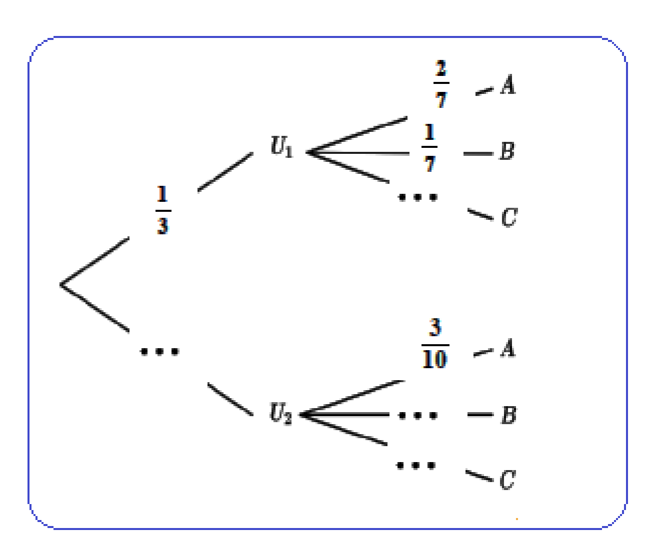
نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ :

A: "سحب كريتين حمراوين"

B: "سحب كريتين سوداوين"

C: "سحب كريتين من لونين مختلفين"

1) أنقل، وأكمل شجرة الاحتمالات.



2) أحسب احتمالات الأحداث A ، B و C.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

3) أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X.

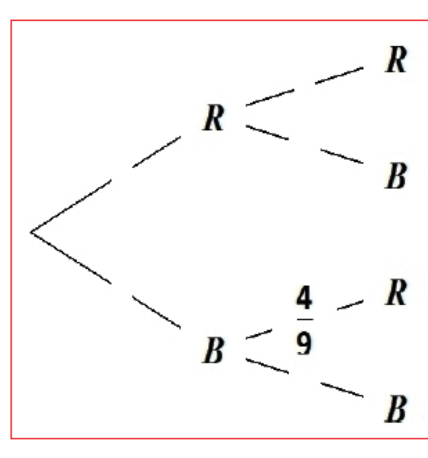
ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

4) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الرابع (04 نقاط): (BAC 2020 - S1 – M)

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نُعيدها إلى الصندوق ونُضيف له كرية بيضاء وإذا ظهرت كرية بيضاء نُعيدها إلى الصندوق ونُضيف له كرية حمراء، ثم نُكرّر العملية مرّة ثانية.



1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تُنمذج هذه التجربة ثم أكملها.

2) بيّن أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

3) احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ . برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و 7.

ب. عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين الخامس (04 نقاط): (BAC 2020 - S2 – M)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n \geq 2$)

و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق.

1) أ . احسب احتمال كل من A و B حيث:

A : "سحب كريتين من نفس اللون" و B : "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون"

ب. عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون: $P(A) = \frac{17}{55}$.

2) نفرض في ما يلي: $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين .

نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد: $\cos(\alpha)\cos(\beta)$

أ . برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي: $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1.

ب. بيّن أنّ: $P(X = 0) = \frac{27}{55}$.

جـ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

مع تحيات الأستاذ القـد

☜ الإحتمالات (الجزء الثاني - البكالوريات)

جميع بكالوريات شعبة التقني الرياضي

التمرين الأول (04 نقاط): (BAC 2018 - S2 – MT)

ـ كيس به 7 كريات متماثلة، لا نفرّق بينها باللمس ، منها :

3 بيضاء
و
4 خضراء

ـ نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس.

I) 1) احسب احتمال الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون ".

2) احسب احتمال الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون ".

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري) .

فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$،

وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثم عرّف قانون احتماله.

2) بيّن أنّ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X بدلالة α هو : $E(X)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$.

ثم اوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين الثاني (04 نقاط): (BAC 2019 - S1 – MT)

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبرّرا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريّات بيضاء تحمل الأرقام 1 , 2 , 3 وكريّتين سوداوين تحملان الرقمين 1 , 2 .

(الكريّات لا نفرّق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريّات عشوائيا وفي آن واحد .

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريّات السوداء المسحوبة.

1) قيم المتغير العشوائي X هي: أ) $\{1;2;3\}$ ، ب) $\{0;2;3\}$ ، جـ) $\{0;1;2\}$

2) الأمل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو: أ) $E(X)=\dfrac{4}{5}$ ، ب) $E(X)=\dfrac{6}{5}$ ، جـ) $E(X)=\dfrac{11}{10}$.

3) احتمال "الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريّات المسحوبة"

يساوي : أ) $\dfrac{7}{10}$ ، ب) $\dfrac{9}{10}$ ، جـ) $\dfrac{3}{5}$

4) احتمال" باقي قسمة مجموع مربّعات الأرقام التي تحملها الكريّات المسحوبة على 13 هو 1 "

يساوي: أ) $\dfrac{2}{5}$ ، ب) $\dfrac{3}{10}$ ، جـ) $\dfrac{1}{5}$

التمرين الثالث (04 نقاط): (BAC 2019 - S2 – MT)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3

وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .

1) احسب احتمال الحوادث التالية:

أ) الحادثة A : " الحصول على كرية بيضاء واحدة ".

ب) الحادثة B : " الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر".

جـ) الحادثة C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية ".

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب) احسب $P\left(X^2-X\leq 0\right)$.

التمرين الرابع (05 نقاط): (BAC 2020 - S1 – MT)

يحتوي كيس على: أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ،2، 2

و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 3 ، 2.

الكريات لا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحدثين: A "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم"

و B "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون"

أ . احسب احتمال كل من الحدثين A و B.

ب. بيّن أنّ احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرّقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

جـ. استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرّقم أو مختلفتين في اللون .

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جُداء الرّقمين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين.

عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.

3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كريتين:

إذا كان جُداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار،

إذا كان جُداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار

و إذا كان جُداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار.

(x و y عددان طبيعيان غير معدومين)

عيّن قيمة كلّ من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

التمرين الخامس (04 نقاط): (BAC 2020 - S2 – MT)

يحتوي كيس على:

كريتين خضراوين تحملان الرّقمين 1 ، 2
وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2
و أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 4.

(الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

I) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد .

1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون ".

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأقل ".

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ . بيّن أنّ: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثمّ عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .

ب. احسب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X .

II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث: " الحصول على 3 أرقام جُداؤها عدد زوجي " .

احسب احتمال C .

مع تحيات الأستاذ القـد